Lista 4: Cálculo I

A. Ramos *

April 8, 2018

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Derivadas, regras de cálculo, regra da cadeia, derivada implícita.

1 Exercícios

Faça do livro texto, os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidos em aula.

2 Exercícios adicionais

2.1 Cálculo de derivadas

Calcule os seguintes limites.

1. Calcule $\lim_{x\to 1} \frac{x^{1000000}-1}{x-1}$.

2. Mostre que se $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Então, $f'(x) = a^x \ln(a)$.

3. Se
$$f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}.$$
Calcule a função derivada. *Rpta:* $f'(x) = \frac{2}{(\sin(x)+\cos(x))^2}$.

4. Se
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & , \text{se } x \leq 2 \\ 8x - 11 & , \text{se } x > 2 \end{cases}$$
Mostre que a existe a derivada $f'(x)$ em $x = 2$ e calcule dita derivada. *Rpta:* 8.

5. Se
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$
Calcule a função derivada. *Rpta:* $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

6. Considere $a \in \mathbb{R}$ e defina
$$f(x) := \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right).$$
Calcule a função derivada. *Rpta:* $f'(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$.

7. Se $f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[6]{16(x^2 + 1)}$ e $f(x^2 - 1) = g(x^2 + 1)$. Calcule $g'(5)$. *Rpta:* $g'(5) = 4/3$. *Dica:* Antes de calcular a derivada, escreva explicitamente a função g usando mudança de variável.

8. Se
$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{5}{2}} \sin(\frac{1}{x}) + 3e^x & , \text{se } x \neq 0 \\ 3 & , \text{se } x = 0 \end{cases}$$
Calcule $f'(0)$. *Rpta:* $f'(0) = 3$.

9. Sejam a e b números reais. Considere a função
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & , \text{se } x \leq 1 \\ x^{-1} & , \text{se } x > 1 \end{cases}$$
Para quais valores de a e b, a função f é derivável em $x = 1$. *Rpta:* $a = -1/3$, $b = 4/3$. *Dica:* Para f ser derivável em x =1, a derivada deve existir e f deve ser continua em $x = 1$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

10. Para quais valores de a e b, a função f é derivável em $x = 2$, onde

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \text{se } x < 2 \\ 2x^2 - 1 & , \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Rpta: $a = 8$ e $b = -9$.

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq x^2 + x^4$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é derivável em $x_0 = 0$ e calcule a derivada. *Rpta:* $f'(0) = 0$.

12. Seja $f(x) = x|x| + x$. Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 1$. *Dica:* Considere $g(x) = f(x) - x$.

13. Encontre o domínio de f, onde $f(x) = |x + 1| + |x + 2| - |x - 3|$. *Rpta:* $\text{dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 3\}$.

14. Sejam f e g duas funções deriváveis em um intervalo aberto I, e seja $a \in I$. Defina:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{se } x < a \\ g(x) & , \text{se } x \geq a \end{cases}$$

Mostre que $F(x)$ é derivável em $x = a$ se, e somente se, $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

15. Encontre a função derivada $f'(x)$ (explicitando seu domínio), se $f(x) = [\![x+1]\!]+[\![1-x]\!]$. *Rpta:* $f'(x) = 0$ e $\text{dom}(f') = \mathbb{Z}$.

2.2 Derivadas de funções trigonométricas

1. Calcule $f'(x)$ se $f(x) = \cot(e^x + \ln x)$. *Rpta:* $f'(x) = -(e^x + \frac{1}{x})\text{cossec}^2(e^x + \ln x)$.

2. Verifique que a derivada de $f(x) = \arctan(\sqrt{4x^2 - 1})$ é $\frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$.

3. Se $f(x) = \left(\sin(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{x}{2})\right)^2$. Mostre que $f'(x) = -\cos(x)$.

4. Se $f(x) = \arctan(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x})$. Então $f'(x) = -1$.

2.3 Derivação Implícita

Calcule $\frac{dy}{dx}$, se

1. $e^y = x + y$, *Rpta:* $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - 1}$.

2. $ay = y \ln y + x$, onde $a \in \mathbb{R}$. *Rpta:* $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-y}$.

3. $y \sin x = \cos(x - y)$. *Rpta:* $\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$.

4. $\arctan y = y - x$. *Rpta:* $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{y^2}$.

2.4 Equação da reta tangente usando derivadas

1. Encontre a equação da reta tangente à curva $x - x^2 y = 1$ cujp ângulo de inclinação é $\pi/4$. *Rpta:* $r : y = x + 1$.

2. Encontre as equações das retas tangentes à curva $x^3 - 3x^2 + 6x + 4 - 3y = 0$ que são paralelas a $y = 2x + 3$.

   Rpta: $r_1 : 6x - 3y = -4$ e $r_2 : y = 2x$.

3. 12 area constante

4. Ache as retas tangentes à hipérbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ que são perpendiculares à reta $4y = 3 - 2x$.

   Rpta: $r_1 : y = 2x + 1$ e $r_2 : y = 2x - 1$.

5. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$, com $a \neq 0$, tem como interseção um ponto que está numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas

6. Encontre as retas tangentes e normal da curva $2y^3 - 9xy + 2x^3 = 0$ no ponto $P = (2, 1)$. *Rpta:* reta tangente: $4y = sx - 6$, reta normal: $5y = 13 - 4x$

7. Qual a reta normal da curva $y = x \ln x$ que é paralela à reta $2y = 2x + 3$? *Rpta:* reta normal: $y = x - 3e^{-2}$.

2.5 Taxas de variação

1. (*Expansão Adiabática*) Quando certo gás composto sofre uma expansão adiabática, a sua pressão p e seu volume V satisfazem à equação $pV^{1.3} = k$, onde k é uma constante. Mostre que $-V\frac{dp}{dt} = 1.3p\frac{dV}{dt}$

2. Uma lâmpada está no solo a 15 m de um prédio. Um homem de 1.8 m de altura anda a partir da luz em direção ao prédio a 1.2 m/s.

   (a) Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o prédio diminui quando ele está a 12m do prédio. *Rpta:* 3.6 m/s

3. (*Escada deslizante*) Uma escada de 25 cm está encostada na parede de uma casa e sua base está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede. Num certo instante, a base da escada se encontra a 7 cm da parede e está sendo empurrada a uma taxa de 2 cm por segundo.

   (a) Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo nesse instante? *Rpta:* (7/12) cm/s;

   (b) Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a 7 cm da parede. *Rpta:* (527/24) cm^2/s;

   (c) Calcule a taxa de variação do ângulo formado pela parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a 7 cm da parede. *Rpta:* 1/12 rad/s.

4. Uma tina de água tem 10 metros de comprimento e uma seção transversal com a forma de um trapézio isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80 cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Suponha que a tina for preenchida com água a uma taxa de 0.2 m^3/min. Quão rápido estará subindo o nível da água quando ela estiver a 30 cm de profundidade? *Rpta:* (10/3) cm/min